13 ЛЕКЦИЯ_ **Гамильтон-Якоби теңдеуі. Оның математикалық құрылысы. Толық интегралы**

Гамильтон-Якоби теңдеуі теориялық механиканың негізгі теңдеулерінің бірі болып табылады. Ол жүйенің динамикасын анықтауда және толық интегралдарды табуда маңызды рөл атқарады.

Ең аз әсер принципі бойынша:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt = 0, \qquad (1)$$

мұндағы әсер ұғымының уақыт пен координатаның функциясы ретінде берілуі туралы баяндалған болатын:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt. \qquad (2)$$

Сонымен қатар, (2) жүйенің берілген $t_1$ және $t_2$ уақыт моменттеріндегі $q_1$ және $q_2$ нүктелерінің арасындағы жасаған траекториясы арқылы алынған интегралы болып табылады. Әсердің вариациясы нәтижесінде осы интегралдың $q(t_1) = q(t_2)$ кезіндегі мәндерін бір біріне жақын траекториялар үшін салыстырғанда, $S$ -тің тек минимум мәніне сәйкес келетін интегралы ғана қозғалыстың шын түрін сипаттайды.

Енді $S$ -ті $q(t_1) = q_1$ бастапқы нүктесі ортақ, бірақ $t_2$ уақыт моментінде әртүрлі нүктелерден өтетін траекторияны сипаттау үшін қарастырамыз. Былайша айтқанда, әсер интегралын интегралдаудың жоғарғы шегіндегі координаттың функциясы ретінде аламыз.

Әсердің бір траекториядан екінші оған жақын траекторияға өту кезіндегі өзгерісін жазатын болсақ:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt. \qquad (3)$$

Шын қозғалыстың траекториясын Лагранж теңдеулері қанағаттандыратындықтан, (3) интеграл нөлге тең болады. Бірінші мүшедегі төменгі шек $\delta q(t_1) = 0$, ал $\delta q(t_2) = \delta q$ деп белгілейміз. $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p$ деп белгілеп, соңында: $\delta S = p\delta q$ немесе жалпы жағдайда кез келген еркіндік дәрежесі үшін

$$\delta S = \sum_i p_i \delta q_i, \qquad (4)$$

Осы өрнектен көріп тұрғанымыздай, әсерден координата бойынша алынған дербес туынды импульсқа тең болады:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \,. \tag{5}$$

Осыған ұқсас әсерді уақыттың функциясы ретінде де қарастыруға болады. Сонымен қатар траекторияны берілген $q_1$ нүктесінде $t_1$ берілген уақыт мезетінде басталып, берілген $q_2$ нүктесінде әртүрлі $t_2 = t$ уақыт мезеттерінде аяқталды деп ұйғарамыз. $\frac{\partial S}{\partial t}$ дербес туындысын сәйкесінше интегралды вариациялау арқылы аламыз.

Әсердің берілген анықтамасы бойынша оның траекторияның бойымен алынған уақыт бойынша толық туындысы

$$\frac{dS}{dt} = L \,. \tag{6}$$

Бір жағынан әсерді, жоғарыда айтылғандай, координата мен уақыттың функциясы ретінде қарастыра отырып, сонымен бірге (5) формуласын қолданып

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i\,\dot{q}_i. \tag{7}$$

Осы екі өрнекті салыстыра отырып

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i \,, \tag{8}$$

немесе

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H. \tag{9}$$

$H = H(p_i, q_i)$ және $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$ еске түсіре отырып, $S(q,t)$ функциясын қанағаттандыратын теңдеуді аламыз:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) = 0 \,, \tag{10}$$

бұл бірінші ретті дербес туындылы теңдеу; оны *Гамильтон-Якоби теңдеуі* деп атайды. Лагранж теңдеулері және канондық теңдеулер сияқты Гамильтон-Якоби теңдеуі де қозғалыс теңдеулерін интегралдаудың негізгі тәсілдерінің бірі болып табылады. Гамильтон-Якоби теңдеуі фазалық кеңістікте қарастырылатын траекторияның бойындағы әсердің экстремалды екенін көрсететін әсер принципіне негізделген. Әсердің Лагранж функциясынан уақыт бойынша интегралы анықталады және Гамильтон функциясы арқылы өрнектеледі.

Кеплер есебі үшін осы теңдеуді жазайық, бұл есептің Гамильтон функциясы

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(r), \tag{11}$$

Гамильтон-Якоби теңдеуін жазатын болсақ

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{p^2}{2m} + U(r) \tag{12}$$

мұндағы

$$\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{r}}. \tag{13}$$

(30.13) өрнегін (30.12)-ге қойсақ

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}\right)^2 + U(r). \tag{14}$$

Декарт координаттар жүйесінде

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right) + U(r) \tag{15}$$

Полярлық координаттар жүйесін қолдансақ

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + \frac{\alpha}{r}. \tag{16}$$

Енді осы Гамильтон-Якоби тәсілін толығырақ қарастыралық. Жалпы жағдайда бірінші ретті дербес туындылы диференциалды теңдеулердің шешімі кез-келген функцияға тәуелді болады. Мұндай шешімді *жалпылама шешім* немесе *жалпы интеграл* деп атайды. Механикада Гамильтон-Якоби теңдеуінің жалпы интегралы емес, көбіне *толық интегралы* негізгі рөл атқарады. Дербес туындылы диференциалды теңдеулердің толық шешімі деп қалауымызша алынған неше тәуелсіз тұрақты болса, соншама тәуелсіз айнымалысы бар болатын теңдеулердің шешімін айтатыны белгілі.

Гамильтон-Якоби теңдеулерінде тәуелсіз айнымалылар – уақыт пен координата болып табылады. Сондықтан еркіндік дәрежесі $s$ - ке тең жүйенің теңдеуінің толық интегралының $s+1$ қалауымызша алынған тұрақтылары бар. Гамильтон-Якоби теңдеулерінің толық интегралы

$$S = f(t, q_1, ..., q_s;\ \alpha_1, ..., \alpha_s) + A \tag{17}$$

Енді Гамильтон-Якоби толық интегралы мен қозғалыс теңдеулерінің арасындағы байланыс жайында тоқталып өтелік. Ол үшін $q, p$ шамаларына канондық түрлендірулер жасау арқылы жаңа айнымалыларға өтеміз. Сонымен қатар, $f(t, q, \alpha)$ – өндіруші функция ретінде, ал $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$– жаңа импульстар ретінде аламыз. Жаңа координаттарды ретімен $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ деп аламыз. Өндіруші функция ескі координаттардан және жаңа импульстардан тәуелді болғандықтан

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \quad H' = H + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{18}$$

$f$ функциясы Гамильтон-Якоби теңдеуін қанағаттандыратындықтан, Гамильтонның жаңа функциясы нөлге айналатындығын көруге болады

$$H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \tag{19}$$

сондықтан жаңа айнымалылардың канондық теңдеулері

$$\dot{\alpha}_i = 0, \;\; \dot{\beta}_i = 0, \tag{20}$$

осыдан

$$\alpha_i = const, \;\; \beta_i = const, \tag{21}$$

болатыны көрініп тұр. Бір жағынан, $s$ теңдеулері

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i \tag{22}$$

$s$ координатаны уақыт арқылы және $2s$ $\alpha$ мен $\beta$ ны өрнектеуге мүмкіндік жасайды.

Механикалық жүйенің қозғалысының есебін Гамильтон-Якоби тәсілімен шешудің негізгі түйіндері мынадай болады.

Гамильтон функциясы арқылы Гамильтон-Якоби теңдеуі құрылады және оның толық интегралы табылады. Оны қалауымызша алынған $\alpha$ тұрақтысы арқылы дифференциалдап және жаңадан алынған $\beta$ тұрақтысына теңестіріп, $s$ алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \tag{23}$$

осыны ары қарай шешіп, $q$ координатасын уақыттың функциясы ретінде және $2s$ кез-келген тұрақтыларын табамыз. Импульстің уақытқа тәуелділігін $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ теңдеуі арқылы алуға болады.

Гамильтон-Якоби теңдеуі – $H$ функциясы уақытқа тәуелсіз берілген жағдайда немесе жүйе консервативті болғанда анағұрлым қарапайымырақ болады. Әсердің уақытқа тәуелділігі былай беріледі:

$$S = S_0(q) - Et, \tag{24}$$

(10) теңдеуіне $S_0(q)$ қойып Гамильтон-Якоби теңдеуін мына түрде жазуға болады:

$$H\left(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = E. \tag{25}$$

Гамильтон-Якоби теңдеуі бірінші ретті гиперболалық теңдеудің ерекше жағдайы болып табылады. Гамильтон-Якоби теңдеуінің толық интегралы жүйенің қосымша интегралы болып табылады, ол қозғалыстың инварианттарын сипаттайды және жалпыланған координаталар мен уақытқа байланысты. Толық интегралдарды іздеу теориялық механиканың маңызды міндеті болып табылады, өйткені олар жүйенің қозғалыс теңдеулерінің жалпы шешімдерін табуға мүмкіндік береді.

Гамильтон-Якоби теңдеуі және оның толық интегралы теориялық механикада маңызды рөл атқарады. Олар жүйенің динамикасын анықтауға және қозғалыстың инварианттарын сипаттайтын толық интегралдарды табуға мүмкіндік береді. Гамильтон-Якоби теңдеуін және оның математикалық құрылысын зерттеу классикалық механиканың негізінде жатқан принциптер мен заңдарды жақсы түсінуге көмектеседі.

Өзін-өзі бақылауға арналған тапсырмалар мен сұрақтар

1. Гамильтон-Якоби теңдеуі дегеніміз не және ол қандай теңдеуден тұрады?
2. Гамильтон-Якоби теңдеуінің негізінде қандай принцип жатыр?
3. Гамильтон-Якоби теңдеуінің шешімі болып табылатын S әрекет функциясының физикалық мағынасы қандай?
4. Гамильтон-Якоби теңдеуінің толық интегралы нені білдіреді және ол жүйе қозғалысының инварианттарымен қалай байланысты?
5. Гамильтон-Якоби теңдеуін шешу және толық интегралдарды табу үшін қандай әдістер қолданылады?
6. Теориялық механикадағы жүйелердің қандай мысалдарын Гамильтон-Якоби теңдеуі арқылы сипаттауға болады және толық интегралдар бар?
7. Гамильтон-Якоби теңдеуі қозғалыс теңдеулерімен және механиканың Гамильтондық тұжырымымен қалай байланысты?

Қолданылған әдебиет

1. N. Beissen, H. Quevedo. Lecture Course on Theoretical Mechanics. – Учебное пособие на английском языке под грифом УМО РУМС и МОН РК для студентов университетов по специальностям «Физика» и «Ядерная физика». Алматы, Қазақ университеті, 2017. 9,75 п.л.
2. М.Е. Абишев, Н.Ә. Бейсен. – Теориялық физиканың таңдаулы тараулары: оқу құралы. Алматы: Қазақ университеті, 2018 – 228 б.
3. Теориялық механика: оқулық / Н.Ә. Бейсен. – Алматы: Қазақ университеті, 2023. – 18,5 б.т. ISBN 978-601-04-6387-5